2012 m. fizikos olimpiados II turo uždavinių sprendimai
XI klasė

1. Palydovas sukasi aplink nežinomą planetą orbita, kurios spindulys $r = 4{,}7 \cdot 10^6$ km. Palydovo linijinis greitis v = 10 km/s. Planetos spindulys $R = 1{,}5 \cdot 10^5$ km. Nustatykite planetos medžiagos vidutinį tankį ρ. Gravitacijos konstanta $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$.

Sprendimas:

Planetos tankis $\rho = \dfrac{M}{V}$. (1 taškas)

Čia M – planetos masė, V – jos tūris.

Rutulio formos planetos tūris $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. (1 taškas)

Jos masę galima rasti pasinaudojus palydovą veikiančia planetos traukos jėga. Jos kryptis – link planetos centro, o modulis pagal visuotinės raukos dėsnį:

$$F_1 = G\frac{Mm}{r^2}.$$ (1 taškas)

Čia m – palydovo masė.

Palydovui judant r spindulio apskritimo orbita ši traukos jėga vaidina įcentrinės jėgos vaidmenį, t.y. $F_{\text{įc}} = F_1$. (1 taškas)

Įcentrinė jėga $F_{\text{įc}} = \dfrac{mv^2}{r}$, (1 taškas)

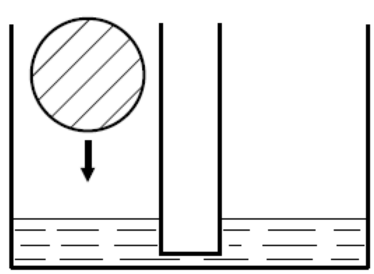
Todėl $\dfrac{mv^2}{r} = G\dfrac{Mm}{r^2}$. (1 taškas)

Iš čia $M = \dfrac{v^2 r}{G}$. (1 taškas)

Tada įrašę planetos masės ir tūrio formules randame jos tankį:

$$\boxed{\rho = \frac{M}{V} = \frac{3}{4}\frac{v^2 r}{\pi R^3 G} \approx 500\ \mathrm{kg/m^3}}.$$ (3 taškai)

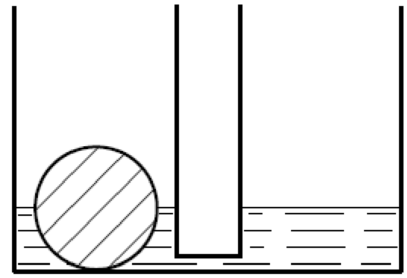
2. Į du vienodus susisiekiančius indus įpilta vandens (pavaizduota brėžinyje). Į vieną indą įdedamas ledo rutulys, kurio tūris V = 100 cm^3. Po labai trumpo laiko, nusistovėjus vandens lygių pusiausvyrai abiejuose induose, vanduo apsėmė lygiai pusę ledo rutulio. Kokia vandens masė m_1 pateko į antrąjį indą padėjus ledo rutulį? Kokia vandens masė m_2 pateks po to, kai visas ledas išsilydys? Vandens tankis ρ_v = 1000 kg/m^3, ledo tankis ρ_l = 900 kg/m^3.



Sprendimas

Kadangi ledo rutulys apsemtas iki pusės, tai jis atsirėmė į dugną. Dėl to vandens tūris kairėje pusėje (inde su ledu) bus $V / 2$ = 50 cm^3 mažesnis negu dešinėje. (2 taškai)

Nusistovėjus pusiausvyrai pusė šio vandens kiekio turi patekti į dešinį indą, t.y.:



$$\boxed{m_1 = \rho_v \frac{V}{4} = 25\ \text{g.}}$$ (2 taškai)

Kai ledas išsilydys, vandens masė padidės dydžiu

$m_{ledo} = V\rho_l = 90$ g. (2 taškai)

Dėl to iš viso iš kairės į dešinę turi patekti vandens masė, lygi

$m_{ledo}/2 = \rho_l\, V/2 = 45$ g. (2 taškai)

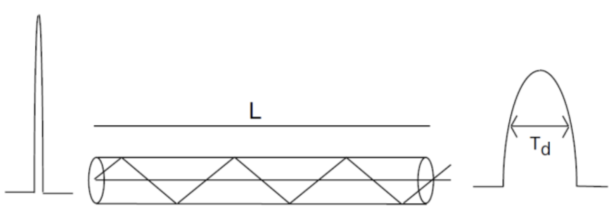
Taigi, išsilydžius ledui į antrąjį indą patenka

$$\boxed{m_2 = \rho_l \frac{V}{2} - \rho_v \frac{V}{4} = 20\ \text{g vandens.}}$$ (2 taškai)

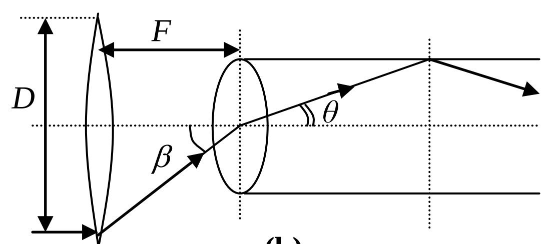
3. Labai trumpi pasikartojantys šviesos impulsai fokusuojami lęšių į šviesolaidį, kurio galas yra lęšio židinio plokštumoje. Koks gali būti maksimalus impulsų perdavimo šviesolaidžiu dažnis *f*, kad šviesolaidžio išėjime gretimi impulsai nepersiklotų? Šviesolaidžio ilgis L = 100 m., šviesolaidžio šerdies lūžio rodiklis $n_š = 1{,}44$,o apvalkalo lūžio rodiklis $n_a = 0{,}99 n_š$. Lęšio židinio nuotolis F = 5 mm, lygiagrečių spindulių pluošto prieš lęšį skersmuo D = 2,0 mm, švieos greitis ore $c = 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}$, impulsų trukmė šviesolaidžio įėjime daug mažesnė už jų pasikartojimo periodą.

Sprendimas

Braižome spindulių eigą [(a) dalyje bendras vaizdas, (b) – detalus spindulių kelias].



(a)



(b)

Už brėžinį – (1 taškas)

Laikas, per kurį šviesa sklinda šviesolaidžiu išilgai šviesolaidžio ašies $t_1 = \dfrac{n_š L}{c}$, (1 taškas).

Čia c - šviesos greitis vakuume. Laikas, per kurį šviesa sklinda šviesolaidžiu išilgai spindulio, sudarančio didžiausią kampą θ su šviesolaidžio ašimi, yra lygus $t_2 = \dfrac{n_š L}{c\cos\theta}$. (1 taškas)

Tada šviesolaidyje išplitusio impulso trukmė ir minimalus impulsų pasikartojimo periodas

$T_d = t_2 - t_1 = \dfrac{n_š L}{c}\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - 1\right)$, o maksimalus impulsų pasikartojimo dažnis $f = \dfrac{1}{T_d}$. (1 taškas)

Didžiausią kampą su šviesolaidžio ašimi sudaro tie spinduliai, kurie yra į lęšį krentančio pluošto kraštuose. Tokie spinduliai į šviesolaidžio galą krenta kampu $\boxed{\beta = \arctan\left(\dfrac{D}{2F}\right)}$. (1 taškas)

Patekdami į šviesolaidį, spinduliai lūžta (žiūr. brėž. b), ir iš lūžio dėsnio

$\sin\beta = n_š \sin\theta$ (1 taškas)

randame didžiausią kampą $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{n_š}\sin\beta\right)$. (1 taškas)

Panaudojus uždavinio sąlygoje duotas fizikinių dydžių skaitines vertes randame, kad kampas $\beta = 11{,}3^0$, o kampas $\theta = 7{,}82^0$. (1 taškas)

Tokį kampą su šviesolaidžio ašimi sudarantys spinduliai patiria visiškąjį vidaus atspindį nuo aplinkų ribos šerdis-apvalkalas, kadangi $90^0 - \theta = 82{,}2^0$ yra daugiau už visiškojo vidaus atspindžio kampą

$$\arcsin\left(\frac{n_a}{n_š}\right) = 81{,}9^0.$$ (1 taškas)

Kampui $\theta = 7{,}82^0$ impulsų pasikartojimo dažnis $\boxed{f = \frac{c\cdot\cos\theta}{n_š L(1-\cos\theta)} \approx 222\ \mathrm{MHz}}$.(1 taškas)

4. *M* masės lėkštė, stovinti ant nesvarios vertikalios spyruoklės, svyruoja periodu $T = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ s. Iš tam tikro aukščio masės *m* kamuoliukas nukrenta ant lėkštės tuo momentu, kai ji eina per savo pusiausvyros padėtį. Kamuoliuko ir lėkštės smūgis buvo tamprus, po smūgio lėkštės greičio modulis *V* ir kamuoliuko greičio modulis *v* nepakito, bet greičių kryptys tapo priešingomis. Po laiko *t*, lygaus pusei lėkštės svyravimų periodo, kamuoliukas vėl nukrenta ant lėkštės, kuomet ji eina per savo pusiausvyros padėtį ir vėl atšoksta, nekeisdamas greičių modulių vertės. Žinodami lėkštės laisvųjų svyravimų amplitudę *A* = 1,0 cm, apskaičiuokite kamuoliuko ir lėkštės masių santykio $\frac{m}{M}$ skaitinę vertę. Laisvojo kritimo pagreitį *g* laikykite lygiu 10 m/s^2.

Sprendimas

Iš judesio kiekio tvermės dėsnio $mv - MV = -mv + MV$ (2 taškai)

randame $\frac{m}{M} = \frac{V}{v}$. (1 taškas)

Laiko tarpas tarp kamuoliuko ir lėkštės susidūrimų lygus $t = \frac{2v}{g}$. (1 taškas)

Jis taip pat lygus pusei lėkštės svyravimo periodo $t = \frac{T}{2}$. (1 taškas)

Iš čia surandame, kad $v = \frac{gT}{4}$. (1 taškas)

Remiantis energijos tvermės dėsniu

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{MV^2}{2},$$ (1 taškas)

gauname, kad $V = A\sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{2\pi A}{T}$. (1 taškas)

Čia *k* – spyruoklės tamprumo koeficientas, o $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ - lėkštės svyravimų periodas. (1 taškas)

Tuomet $\boxed{\frac{m}{M} = \frac{8\pi A}{gT^2} = 0{,}032.}$ (1 taškas)